Conviene correre sotto la pioggia?

La redazione de *il Quanto*

Sommario

Consideriamo il problema di un malcapitato corridore (obbligato) sotto la pioggia: vale davvero la pena di correre per bagnarsi di meno, fissata una distanza da percorrere? Esiste una velocità ottimale da tenere? Vale la pena di correre a perdifiato, o un'andatura veloce offre già grandi vantaggi rispetto alla passeggiata?

Tratto da "Is it really worth running in the rain?" di Alessandro De Angelis, European Journal of Physics.

Studio del fenomeno

Consideriamo uno sperimentatore, rappresentato da un parallelepipedo di superfici S_1, S_2, S_3, che corre sotto una pioggia verticale (Figura 1). Il suo moto si svolge lungo l'asse y con velocità $\mathbf{v} = (0, v, 0)$.

La pioggia cade verticalmente, e la sua velocità è $\mathbf{v_p} = (0, 0, -v_z)$. Anzitutto è necessario definire la "densità" della pioggia in aria, ovvero il volume di pioggia in un metro cubo d'aria. Supponiamo che durante il moto dello sperimentatore le caratteristiche della precipitazione (intensità, dimensioni delle gocce, direzione di caduta) rimangano pressoché costanti; le gocce che cadono avranno un volume medio costante, e saranno pure costanti la distanza media orizzontale e verticale tra due gocce.

Per fissare le idee e semplificare i calcoli, supponiamo che le gocce di pioggia siano disposte su un ideale reticolo e abbiano distanza orizzontale a e verticale b le une dalle altre [1], in modo che una cella elementare del reticolo abbia volume $V = a^2 b$. La *densità numerica* delle gocce, ovvero il numero di gocce per metro cubo, sarà uguale al volume unitario diviso il volume elementare:

$$n = \frac{1\,\mathrm{m}^3}{V}$$

Dopo questi calcoli preliminari, è ora di affrontare il problema, calcolando quante gocce cadono sullo sperimentatore nell'intervallo di tempo Δt. Per far ciò è molto utile pensare di muoversi alla stessa velocità $\mathbf{v}$ dello sperimentatore che si muove. In questo caso, ci sembrerà che lui stia fermo, e che la pioggia cada inclinata andando a battere sulla sua faccia. In questo sistema di riferimento, che chiameremo $\mathcal{O}'$, la pioggia ha velocità $\mathbf{v_p'} = (0, -v, -v_z)$, e formerà con l'asse verticale un angolo θ.

Prima di entrare nel vivo dei calcoli, notiamo che in questa situazione il volume della cella elementare V' sarà relativo a un parallelepipedo con due facce inclinate, ma con uguale base a^2 e altezza b: $V' = V$.

[1] In realtà dare una "forma" alla pioggia cadente, ad esempio pensarla disposta su un reticolo, e del tutto ininfluente per la trattazione, e come si vedrà più avanti le dimensioni a e b, come il volume della singola goccia, spariranno.

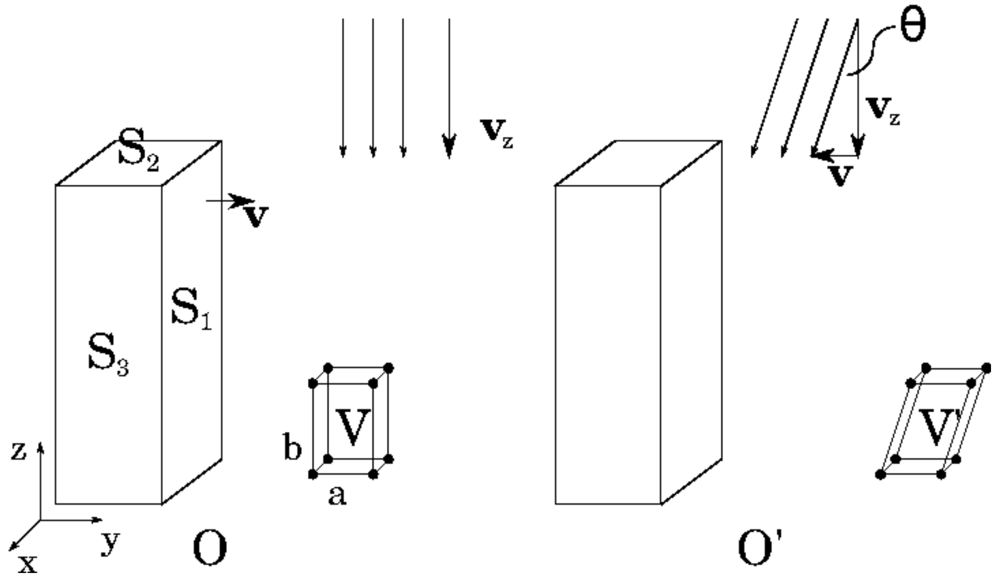

Figura 1: Pioggia cadente nel sistema di riferimento solidale alla pioggia e al corridore

.

Finalmente, il numero di gocce che cadono sullo sperimentatore nell'unità di tempo (Equazione 1) è pari al flusso delle gocce (numero di gocce per unità di tempo e area) moltiplicato la superficie efficace S, ovvero le superfici S_1 e S_2 proiettate lungo la direzione di caduta della pioggia:

$$S = S_2 \cos(\theta) + S_1 \sin(\theta)$$

e

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = S v_p n = \frac{S v_p}{V}, \tag{1}$$

dove v_p è la velocità della pioggia cadente, pari a $\sqrt{v^2 + v_z^2}$. Poiché, come si nota dall'immagine, il coseno dell'angolo θ è pari a v_z/v_p, si ha $v_p = v_z/\cos(\theta)$, che sostituito in Equazione 1 dà

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{S_2 \cos(\theta) + S_1 \sin(\theta)}{V} \frac{v_z}{\cos(\theta)} = [S_2 + S_1 \tan(\theta)] \frac{v_z}{V}. \tag{2}$$

Moltiplicando per il tempo necessario a percorrere una distanza L, pari a $\Delta T = L/v$, si ottiene il numero di gocce che impattano lungo tutto il percorso:

$$\Delta N = [S_2 + S_1 \tan\theta] \frac{v_z}{V} \frac{L}{v},$$

e notando (sempre da Figura 1) che $\tan(\theta) = v/v_z$, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta N &= \left[S_2 + S_1 \frac{v}{v_z} \right] \frac{v_z}{V} \frac{L}{v} \\ &= \frac{L v_z}{V} \left(\frac{S_2}{v} + \frac{S_1}{v_z} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Una formula generale, che ingloba i risultati ottenuti fin qui, si ottiene permettendo alla pioggia di cadere obliquamente, nella direzione e verso del movimento dello sperimentatore; in questo caso la velocità della pioggia avrà due componenti, una lungo z e una lungo y: $\mathbf{v_p} = (0, v_y, -v_z)$ (Figura 2).

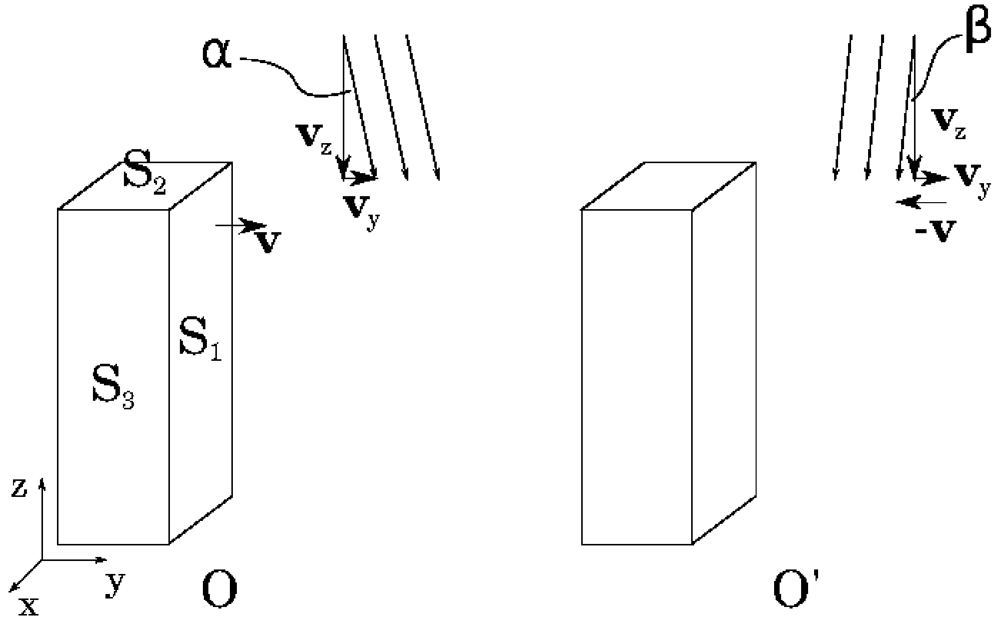

Figura 2: Pioggia inclinata.

Anche in questo caso vale l'Eq. 2, con l'accortezza di aggiungere un valore assoluto alla tangente[2], che questa volta sarà uguale al rapporto tra la somma delle velocità lungo l'asse y (cioè $v_y - v$) e la velocità di caduta della pioggia (v_z). L'equazione, riscritta, diventa

$$\begin{aligned} \Delta N &= [S_2 + S_1 \left|\tan \beta\right|] \frac{v_z}{V} \frac{L}{v} \\ &= \left[S_2 + S_1 \left|\frac{v - v_y}{v_z}\right|\right] \frac{v_z}{V} \frac{L}{v} \\ &= \frac{L v_z}{V} \left(\frac{S_2}{v} + \frac{S_1}{v_z} \left|1 - \frac{v_y}{v}\right| \right) \end{aligned} \tag{4}$$

dove, nel secondo passaggio, abbiamo invertito v_y e v, dato che sono all'interno del valore assoluto. Notiamo che ponendo $v_y = 0$, otteniamo l'Eq. 3, quindi possiamo studiare solo questa relazione, da cui si ricava, come caso particolare, la precedente.

Come primo passo è necessario sostituire i parametri non misurabili (come il volume V) con quantità facilmente misurabili. Consideriamo allora l'intensità di precipitazioni I, ovvero la grandezza che misura quanto volume di pioggia cade nell'unità di tempo all'interno dell'unità di superficie (e si misura in $L/(m^2h)$, o, dopo una semplice conversione, in mm/h).

L'intensità di precipitazioni corrisponde al numero di gocce che cadono nell'unità

[2] Il valore assoluto è necessario poiché è indifferente se la pioggia ci cade sulla schiena o sul petto, quello che conta è l'angolo assoluto rispetto alla verticale.

di tempo e superficie moltiplicato il volume della singola goccia di pioggia (γ):

$$I = \frac{\Delta N\,\gamma}{\Delta t\,S}.$$

Andandoci a riguardare Eq. 1, scopriamo che, portando a sinistra S, si può scrivere

$$I = \frac{v_z}{V}\gamma. \tag{5}$$

Il volume V_{tot} assorbito dallo sperimentatore durante la sua corsa è il prodotto del numero di gocce per il volume della singola goccia. Il numero di gocce ce lo da l'Eq. 4, e al posto di V scriviamo quello che si trova invertendo la relazione 5. Il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} V_{tot} =& \Delta N\,\gamma = \gamma L v_z \frac{I}{\gamma\, v_z}\left(\frac{S_2}{v} + \frac{S_1}{v_z}\left|1 - \frac{v_y}{v}\right|\right) \\ =& IL\left(\frac{S_2}{v} + \frac{S_1}{v_z}\left|1 - \frac{v_y}{v}\right|\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Se si riscrive la funzione togliendo il modulo, ovvero definendola a pezzi nei due intervalli in cui l'argomento del modulo è positivo o negativo, si nota che per $v < v_y$ ritroviamo un'iperbole con coefficiente positivo (e dunque con concavità verso l'alto) sommata a un termine costante. Per $v \geqslant v_z$ il coefficiente dell'iperbole può essere positivo o negativo, a seconda dei valori assunti da S_1, S_2, v_y e v_z. In particolare, se $\frac{v_y}{v_z} > \frac{S_2}{S_1}$, il coefficiente del termine iperbolico è positivo, ovvero l'iperbole è crescente: solo in questo caso si ha un minimo per $v = v_z$.

Per l'adulto medio, il grafico di quanto ci si bagna, nei due casi di pioggia verticale o inclinata a 30°, è riportato in Figura 3.

Il grafico è stato disegnato considerando un'intensità delle precipitazioni di 4 mm/h, e un'area delle superfici S_1 e S_2, da noi misurate, pari rispettivamente a 0.630 m^2 e 0.123 m^2.

Riportiamo di seguito l'articolo divulgativo come apparso su *il Quanto*.

Articolo originale

A tutti è capitato di essere sorpresi da un acquazzone, e di correre velocemente fino al più vicino riparo, cercando di arrivarci il meno possibile bagnati. Ma vale davvero la pena di correre sotto la pioggia per bagnarsi di meno? O sarebbe meglio camminare a velocità moderata? Intuitivamente, il problema può essere visto in questi termini: supponendo una pioggia che cada verticalmente, camminare significa esporre alle gocce la minima superficie di impatto, cioè spalle e testa; correndo, invece, si ha l'impressione che la pioggia venga verso di noi, e anche la parte anteriore del corpo contribuisce alla "superficie efficace" dove batte la pioggia. Dopo queste riflessioni, non è più scontato pensare che correre alla massima velocità sia davvero una strategia vincente...

Affrontiamo il problema da un punto di vista fisico: rappresentiamo il malcapitato sperimentatore come un parallelepipedo, alto, largo e spesso tanto quanto lui, che si muove nella pioggia. Possiamo provare a immaginarci di fermare il tempo e vedere le gocce d'acqua ferme a mezz'aria; durante il movimento dello sperimentatore la cosiddetta intensità della precipitazione (la grandezza misurata in mm/h, che ci dice quanto

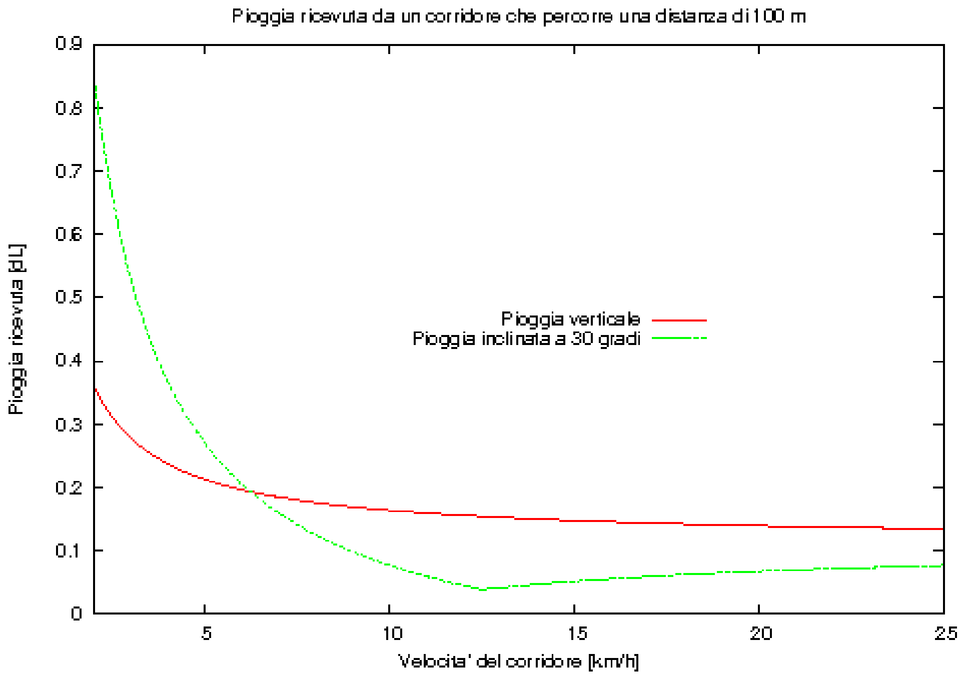

Figura 3: Pioggia totale caduta sullo sperimentatore.

è intensa la pioggia) rimane pressoché costante, e si può pensare alle gocce di pioggia come sfere d'acqua equidistanziate che cadono verso il suolo a velocità costante. Prima di fare ulteriori considerazioni, analizziamo due condizioni limite, che ci permettono senza fare conti di capire cosa succede in situazioni particolari. Questo serve per avere un'idea del risultato che deve essere prodotto dal calcolo, e per fare una prima verifica della validità del modello presentato.

Se lo sperimentatore si muove a una velocità piccolissima, diciamo nulla, l'unica superficie interessata alla pioggia sarà quella superiore, che è anche la più piccola tra le tre del parallelepipedo. La quantità di pioggia che incide nell'unità di tempo, ovvero quanto ci si bagna in un secondo, avrà il valore minimo che si può ottenere con qualsiasi condizione di moto; il rovescio della medaglia è che camminando piano, ci vuole tanto tempo per spostarsi: tanto più si va lenti, tanto più ci si bagna. D'altro canto, se lo sperimentatore corre molto veloce, sarebbe solo la superficie frontale a impattare contro le gocce di pioggia e a "raccogliere" tutta l'acqua che sta cadendo nel volume spazzato durante il tragitto. Si tratta ora di analizzare la situazione completa e confrontare i risultati con le condizione limite. Nel sistema di riferimento di un osservatore, la pioggia cade dritta e lo sperimentatore si sposta sotto di essa; se ci si pone nel sistema di riferimento dello sperimentatore, ovvero se immaginiamo di correre al suo fianco, alla sua medesima velocità, ci sembrerà che egli sia fermo e che sia la pioggia a cadere inclinata e battergli contro, non solo sulla testa, ma anche sulla superficie frontale. A crescenti velocità di corsa, l'unico effetto sarà che la pioggia diventerà sempre più inclinata, e il numero di gocce che impattano sullo sperimentatore per unità di tempo sarà proporzionale alla quantità di precipitazioni ed alla superficie efficace, cioè la parte dello sperimentatore esposta alla pioggia. Moltiplicando infine per il tempo che il malcapitato impiegherà per giungere fino al riparo più vicino (distanza diviso velocità) si ottiene il numero di gocce che hanno colpito lo sperimentatore. L'andamento di quanto ci si bagna in funzione della velocità della corsa è di tipo iperbolico, cioè per velocità molto piccole, ci bagneremo tantissimo; per velocità crescenti, ci si bagna sempre di meno, fino a raggiungere il valore minimo ottenuto nella seconda condizione limite. È curioso notare, infine, che correre a velocità stratosferiche non ci dà grandi vantaggi rispetto a una corsa moderata: per un adulto medio, passare da una corsetta di 10 km/h al record mondiale di 36 km/h comporta una diminuzione del bagnato di solo 20%.

Un risultato più interessante si ottiene invece se si considera una pioggia non verticale, ma leggermente inclinata, il cui verso è uguale a quello del moto dello sperimentatore (per capirci, una pioggia che batte anche sulla schiena, se stiamo fermi). Lo stesso ragionamento usato con la pioggia dritta porta a un risultato simile al precedente, con un'unica importante differenza: l'esistenza di un valore ottimale di velocità, che minimizza quanto ci bagniamo. Intuitivamente, se corriamo alla stessa velocità del vento che muove la pioggia, riusciremo a bagnarci solo sulla superficie superiore, che è la minore superficie efficace possibile. Questo valore minimo è però possibile solo in certe condizioni di vento e di corporatura dello sperimentatore.